

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026****CLASA a IX-a**

Problema 1. Considerăm numerele reale a, b, c și ecuațiile $x^2 + 4ax + (b + c)^2 = 0$, $x^2 + 4bx + (c + a)^2 = 0$, respectiv $x^2 + 4cx + (a + b)^2 = 0$.

- Arătați că cel puțin una dintre cele trei ecuații are soluții reale.
- Demonstrați că dacă ecuațiile admit o soluție reală comună atunci $a = b = c$.

Problema 2. Fie patrulaterul convex $ABCD$, punctul O de intersecție a diagonalelor sale și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC , respectiv ODC . Demonstrați că O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul

$$4^{n-1} + n^2 + 11$$

este pătrat perfect.

Problema 4. Determinați șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale nenule care verifică simultan următoarele două condiții:

$$(1) \ i + j \text{ divide } a_i + a_j;$$

$$(2) \ a_i + a_j \text{ divide } (i + j)^2,$$

pentru orice i, j numere naturale nenule.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.