

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026****CLASA a XII-a**

Problema 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă pe \mathbb{R} , cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{și} \quad \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx.$$

a) Demonstrați că dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție polinomială de gradul al doilea, având graficul simetric în raport cu dreapta de ecuație $x = \frac{1}{2}$, atunci

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = 0.$$

b) Demonstrați că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $f''(c) = 0$.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Fie (G, \cdot) un grup, iar $f : G \rightarrow G$ un endomorfism al său. Arătați că mulțimea $F_f = \{x \in G \mid f(x) = x\}$ a punctelor fixe ale endomorfismului f este un subgrup al grupului G .

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, iar p cel mai mic divizor prim al lui n . Demonstrați că numărul $m = \frac{n}{p} + 1$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea că în orice grup finit (G, \cdot) de ordin n , dacă pentru un endomorfism $f : G \rightarrow G$ există un automorfism $g : G \rightarrow G$ cu proprietatea că mulțimea $A = \{a \in G \mid f(a) = g(a)\}$ are cel puțin m elemente, atunci f este un automorfism al grupului G .

Problema 3. Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e , iar H un subgrup al său cu $H \neq \{e\}$ și $H \neq G$. Dacă $(xy)^2 = yx$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, demonstrați că:

- $x^2 = y^3$, pentru orice $x \in G \setminus H$ și orice $y \in H$;
- $Z(G) = \{e\}$, unde $Z(G) = \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G\}$ este centrul grupului G , format din toate elementele grupului G care comută cu orice element al grupului G .
- H este comutativ.

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție continuă și bijectivă, cu proprietatea că

$$f(x) < x, \quad \text{pentru orice } x \in (0, 1).$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Demonstrați că pentru orice $x \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

b) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.