

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026****CLASA a XI-a**

**Problema 1.** Fie  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  o matrice inversabilă, cu proprietatea

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Arătați că  $\det(A + A^{-1}) = (\text{Tr}(A))^2$ , unde  $\text{Tr}(A)$  este suma elementelor diagonalei principale a matricei  $A$ .

**Problema 2.** Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale cu  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , pentru care

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$ .

b) Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Fie  $n \geq 2$  un număr natural. Determinați toate matricele  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  cu proprietatea că, dacă  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât  $AB = M$ , atunci  $BA = M$ .

**Problema 4.** Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și neconstantă. Considerăm funcția  $g : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$g(y) = \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}, \text{ pentru orice } y \in \text{Im}(f),$$

unde  $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$ . Demonstrați că funcția  $g$  este continuă dacă și numai dacă există  $a \in (0, 1]$  astfel încât  $f$  este strict monotonă pe intervalul  $[0, a]$  și  $\text{Im}(f) = f([0, a])$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.*