MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2026

Societatea de Științe Matematice din România

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

## CLASA a X-a

**Problema 1.** Se consideră numerele reale $a, b, x, y > 0$, cu $ab \neq 1$, şi $c$ un număr natural nenul astfel încât

$$\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{cx + y} = \log_{ab} y.$$

a) Arătaţi că dacă $c = 1$, atunci numărul $\dfrac{y}{x}$ este iraţional.

b) Demonstrați că numărul $\dfrac{y}{x}$ este rațional dacă şi numai dacă $c$ este produsul a două numere naturale nenule consecutive.

**Problema 2.** Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ care satisfac simultan condiţiile

(1) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

(2) $\overline{f(z)} = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$;

(3) $\overline{z}\, f(z) \in (0, \infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$.

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 + 5 \cdot 6^x = 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x$.

**Problema 4.** Pentru orice mulţime finită $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ de numere complexe nenule cu $n \geq 4$ elemente definim mulţimea:

$$B(A) = \left\{ z_i z_j \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Determinați mulțimile $A$ pentru care $A = B(A)$.

*Timp de lucru 3 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.*